

ミクセルの内部構造を反映する確率モデルを用いた画像分類法

北本 朝展†

高木 幹雄‡

†学術情報センター 研究開発部 ‡東京理科大学 基礎工学部

Abstract: This paper proposes new ideas for the classification of images with the presence of *mixels*, or mixed pixels. Based on the internal structure of mixels, we first propose a probabilistic model called *area proportion density*, and we demonstrate that Beta distribution is an appropriate model for this density. Next, based on the linear model of a mixel, we derive another probabilistic model called *mixel density*. This model is then incorporated into the mixture density model that describes the image histogram and we suggest that the peculiar flat shape of this density effectively models long-tail image histograms. Finally we present experiments on satellite imagery, and the goodness-of-fit of the proposed models is evaluated from the viewpoint of information criterion.

1 はじめに

画素とは画像の「原子」である — すなわちそれ以上分割不可能な最小単位であると従来の画像処理手法では一般に仮定されるが、現実には画像上の画素は実世界のある大きさを持つ領域に対応しており、しかもその領域は必ずしも一様ではない。特に衛星画像や医用画像のように、センサの解像度が実世界の空間的変動のスケールに対して粗い場合には、画素の大きさに対応する実世界の領域には内部構造が存在し、従って複数の分類クラスが画素の内部に含まれる場合がある。このような画素を混合画素 (mixed pixel) あるいはミクセル (mixel) と呼び、反対に内部に単一の分類クラスのみを含む均質な画素をピュアピクセル (pure pixel) と呼ぶ。

本論文の目的は、確率論の立場からミクセルの確率モデルに関して考察することによって、ミクセルの統計的性質がピュアピクセルのそれとは根本的に異なる点を認識し、その上で「すべての画素がピュアピクセル」という仮定に基づく従来の統計的画像処理アルゴリズムに対する、新しい画像分類手法を提案することにある。本論文では、ミクセルの内部構造に関する図形モデルとミクセルの画素値に関する線形モデルを通して、ミクセル画像の解析に有効な新しい確率モデル — 「面積占有率密度」と「ミクセル密度」 — を導く。従来の研究では、これらの存在はほとんど意識されてこなかったが、本論文ではこれらの確率モデルの重要性、特徴および導出過程について論じる。さらに提案手法を衛星画像の分類に適用し、その結果を情報量規準の観点から分析する。

Image Classification Method Using Probabilistic Models that Reflect the Internal Structure of Mixels

Asanobu KITAMOTO†, Mikio TAKAGI†

†National Center for Science Information Systems (NACSIS),

‡Science University of Tokyo

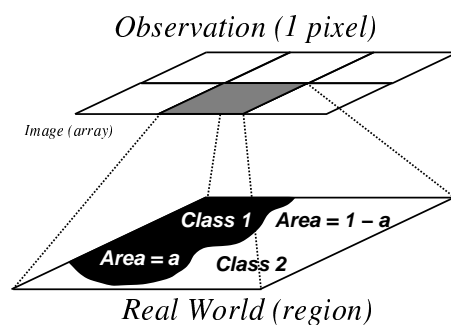


図 1: 2 クラスミクセルのモデル

2 ミクセルのモデル

まず実世界を p 個の異なる波長帯 (バンド) で観測することを考える。このときに得られる画像の各画素の画素値は、 p 次元観測ベクトル $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_p)^t$ を用いて表すことができる。さて、ある画素が k 個の分類クラスを含むミクセルであるとき、本論文ではこれを「 k クラスミクセル」と略称する。例えば図1は2クラスミクセルを示している。このとき k クラスミクセルを構成する各クラスから放射された輝度値を $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^t$ 、各クラスの (画素内) 面積占有率を a_i とする。ただし $0 < a_i < 1$, $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ である。

一般にミクセルの画素値とは、各クラスから放射された輝度値 \mathbf{x}_i を面積占有率の関数で重みづけして混合したものと考えられる。そこで本論文では最も単純なモデルとして、以下の線形モデルを仮定する。

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

ここで、第一項は各クラスからの輝度値を面積占有率で重みづけして混合したものであり、また第二項は各クラスとは独立した雑音を表すものである。ただしスペース

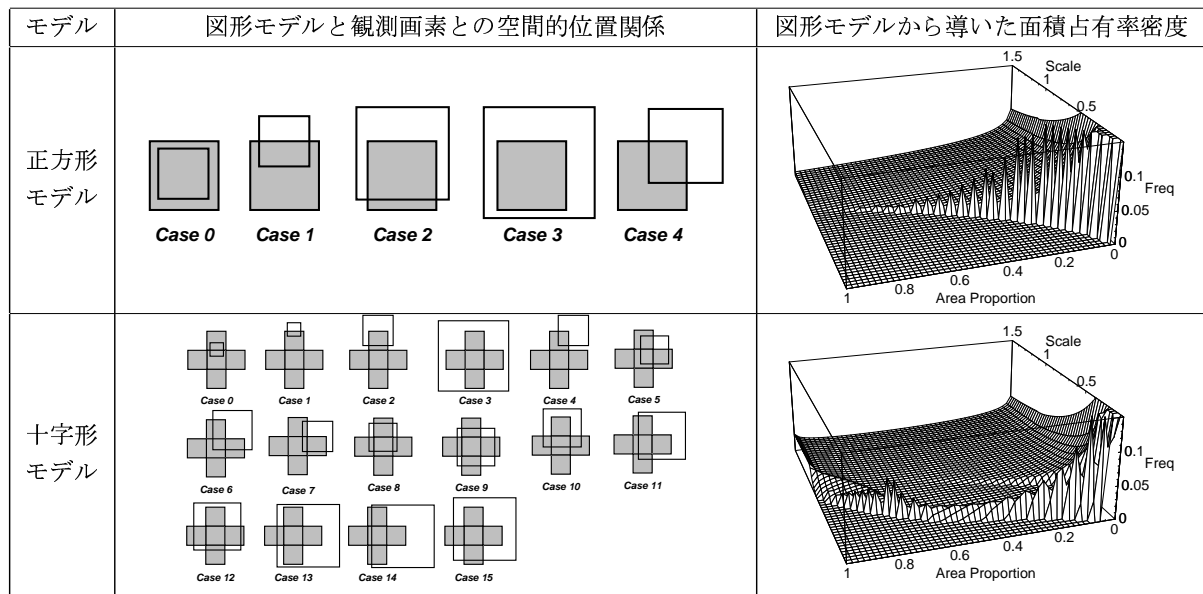


図 2: 図形モデルと観測画素の位置関係, および図形モデルから導かれた面積占有率密度

の制約上, 本論文では最も議論を単純化できる 2 クラスミクセルの場合に以後の議論を限定する. この場合の線形モデルは以下のように表せる.

$$r = ax_1 + (1 - a)x_2 + \varepsilon \quad (2)$$

さて式 (1) の解釈を巡る, 従来研究 (例えば [1, 2]) と本論文との大きな相違点は以下の点にある.

従来研究 x_i は値が「既知」の定数と仮定する.

本論文 x_i は値が「未知」の確率変数, ただし各クラス確率密度関数 $p_i(x_i)$ は既知と仮定する.

従来研究に見られるような, x_i がすべてのミクセルに関して既知であるとの仮定は, x_i が定数であるとの仮定を意味している. 言い換えると, ミクセルの画素値が変動する原因は, 各クラスとは独立した雑音成分 ε にすべて押し込められているのである. しかし現実には, 各クラスからの輝度値自体が各クラス固有の原因によって変動し, この変動の和がミクセルの画素値の変動を引き起こすと考える方が適切だろう. そこで本論文では「 x_i は確率変数であり, ミクセルの画素値の変動には各クラスの輝度値の変動が寄与している」との仮定に基づき, 各クラスの確率密度関数 $p_i(x_i)$ を基本としたミクセルの解析理論を展開する.

本論文ではまず式 (2) の右辺に現れる, a という確率変数の確率モデル「面積占有率密度」に関する議論から始める (第 3 章). 続いて左辺に現れる, r という確率変数の確率モデル「ミクセル密度」に関する議論を展開し (第 4 章), その後 r から a を推定する方法を導く (第 5 章). 確率密度関数自身を画像データから推定する問題については (第 6 章) で簡単に触れる.

3 ミクセルの内部構造から導出した面積占有率密度

ミクセルの面積占有率密度とは, 画像全体を考えた場合の, a という確率変数の事前分布を指すものである. すなわち, この確率モデルは画素の内部構造に密接に関連している. そこで本論文では, 単純な図形モデルを用いた解析的な手法, および合成画像を用いたシミュレーションの両面からその性質を分析する.

まずは簡単な図形モデル — 凸図形として正方形・凹凸図形として十字形 — を用いた場合の面積占有率密度を解析的に導出する. 図 2 に描くように, 図形モデルと観測画素とのあらゆる相対的位置関係を考慮したとき, 観測画素の内部に図形モデルが捉えられてミクセルとなる場合の観測画素内の図形モデルの面積比を面積占有率 a ($0 < a < 1$) と定義する. そして, あらゆる位置関係を考慮した上での a の確率密度関数を面積占有率密度 $f(a)$ とする. 図形モデルが正方形などのように単純な場合には $f(a)$ の解を具体的に求めることができ, 例えば正方形モデルの Case 4 の面積占有率密度は,

$$f(a) = -\log a \quad (3)$$

と求められる. ただしスペースの都合上, このような解析的な計算の詳細は別論文に譲り [3], 本論文では面積占有率密度の最終的な結果だけを図 2 に示す. この図では, ある特定の観測スケールでの面積占有率密度は「area proportion」軸に沿った断面図となる. その形状を典型的に分類してみると, 一様分布型, L 型, U 型, J 型, 鐘型などの形状が出現していることから, 面積占有率密度が多様な形状を取り得ることがわかる.

次に合成画像によるシミュレーションから面積占有率密度を求める. 本論文の主な実験対象である衛星画像

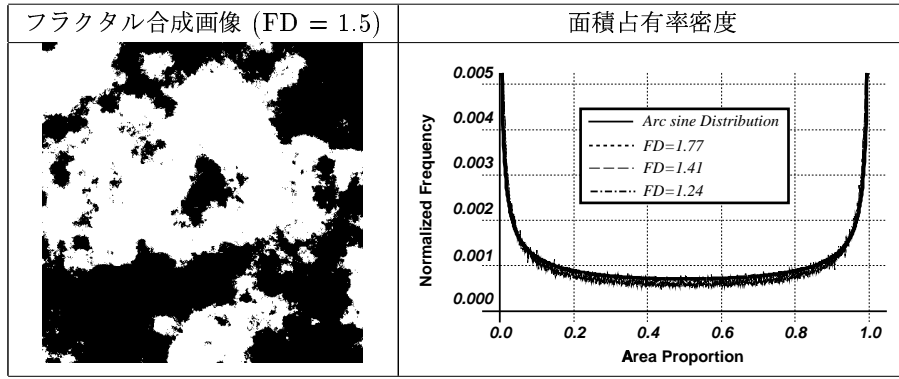


図 3: フラクタル合成画像から導いた面積占有率密度 (FD : フラクタル次元)

中の雲の形状がフラクタルであることから、シミュレーションのモデルとしてフラクタル合成画像を用いた時の実験的な面積占有率密度を求める。アルゴリズムには逐次加算法 [4] を用い、生成された合成画像をブロック単位で観測 (低解像度のセンサを模擬) して得られた面積占有率密度を図 2 に示す。この図に描かれる U 型の形状は、ランダムウォークで知られる逆正弦分布 [5, 6] の形状とほぼ一致することから、逆正弦分布と面積占有率密度との間に何らかの関係があることが推測できる。実際のところ、以下の式で表される逆正弦分布、

$$f(a) = \frac{1}{\pi\sqrt{a(1-a)}} \quad (4)$$

は図 3 のようにデータに良好な適合を示している。

以上に得られたすべての型の分布を記述できるような面積占有率密度のモデルとして、本論文では、

$$f(a) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} a^{\alpha-1} (1-a)^{\beta-1} \quad (5)$$

と表される「ベータ分布」を用いる。ここで、 $0 \leq a \leq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, また $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 a^{\alpha-1} (1-a)^{\beta-1} da$ はベータ関数である。この分布は二つのパラメータを変化させることで、広い範囲の分布を記述することができる。例えば $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ では一様分布、また $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.5)$ では逆正弦分布となる。さらに、ベータ分布の平均 μ_B と分散 σ_B^2 は、 $\mu_B = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\sigma_B^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$ と計算できる。もし $\alpha = \beta$ ならば $\mu_B = 0.5$ となり、この分布は対称となる。さらにこの二つのパラメータを組み合わせることで、画像のテクスチャ的な特徴量としても使える可能性がある。

4 ミクセルの線形モデルから導出したミクセル密度

前章で得られた a の確率モデル、および式 (2) の x_i が正規分布に従うとの仮定を合わせると、式 (2) の右辺の確率モデルはこの時点で確定する。そこで次に、左辺に現れる r の確率モデルに議論を進めよう。

まず初めに、 a をある値に固定した場合の r の確率密度関数 $p(r|a)$ を考えよう。各クラス i の確率密度関数 $p_i(x_i)$ を既知とし、確率変数の和の確率密度関数を求める公式 [6] を適用すると、 $p(r|a)$ は以下のように求められる。まず式 (2) の雑音成分を無視する場合は、

$$p(r|a) = \int_{-\infty}^{\infty} q_1(r-t)q_2(t)dt = q_1(r) * q_2(r) \quad (6)$$

である。ここで $q_1(r) = p_1(r/a)$, $q_2(r) = p_2(r/(1-a))$ であり、 $*$ は畳込み演算を表す。次に雑音成分まで含める場合は以下ようになる。

$$p(r|a) = q_1(r) * q_2(r) * p_\epsilon(r) \quad (7)$$

このように式 (6) に確率密度関数 $p_\epsilon(r)$ を新たに畳み込めば、雑音成分を含む場合の $p(r|a)$ が求まる。

例えば各クラス i の確率密度関数が正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ 、また雑音成分の確率密度関数 $p_\epsilon(r)$ も正規分布 $N(0, \sigma_\epsilon^2)$ と仮定すると、 $p(r|a)$ も正規分布 $N(\mu_a, \sigma_a^2)$ となり、そのパラメータは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mu_a &= a\mu_1 + (1-a)\mu_2 \\ \sigma_a^2 &= \{a\sigma_1\}^2 + \{(1-a)\sigma_2\}^2 + \sigma_\epsilon^2 \end{aligned} \quad (8)$$

このように各クラス i の確率密度関数が正規分布の場合に $p(r|a)$ が簡単に求まるのは、正規分布が安定分布 (stable distribution) の一つであるところに本質的な理由がある。また正規分布でない場合にも、連続的な場合は特性関数 (characteristic function) で簡単に求まる場合があり、離散的な場合にも FFT (Fast Fourier Transform) などを用いて高速に導出できる [7]。

次に画像中に出現しているミクセルの集合を母集団と考えると、面積占有率 a はパラメータ空間 Ψ 内で定義される確率変数の実現値とみなすことができる。このとき、面積占有率 a の値にかかわらずミクセルの画素値が r となる確率を与える確率密度関数を「ミクセル密度」 $d(r)$ と定義する。この確率モデルは、具体的には以下のように計算できる。

$$d(r) = \int_{\Psi} f(a)p(r|a)da \quad (9)$$

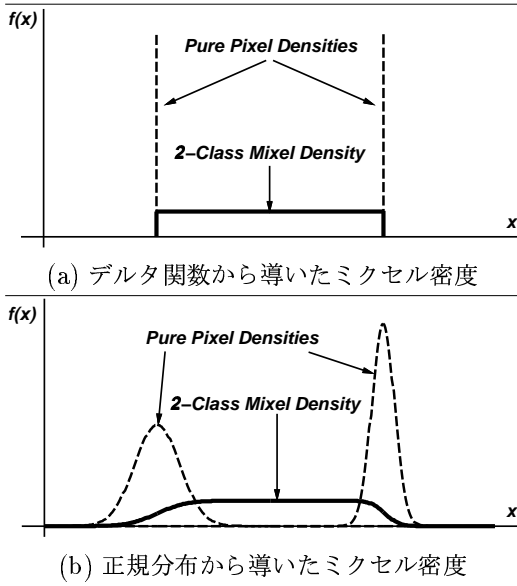


図 4: 2 クラスミクセルのミクセル密度

式 (9) の具体的な計算を示すため、まずは各クラスからの輝度値がどのミクセルでも全く同一、つまりクラス内分散が 0 で各クラスの確率密度関数 $p_i(r)$ がデルタ関数で表されるという最も単純な場合について考える。

$$p_i(r) = \delta(r - \mu_i) \quad (10)$$

このとき面積占有率を固定した確率密度関数 $p(r|a)$ は、

$$p(r|a) = \delta(r - \{a\mu_1 + (1-a)\mu_2\}) \quad (11)$$

である。さらに面積占有率密度を一様分布 $f(a) = 1$ と仮定すると、ミクセル密度の解は以下ようになる。

$$d(r) = \int_0^1 f(a)p(r|a)da \quad (12)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} & \mu_1 < r < \mu_2 \\ 0 & r \leq \mu_1, r \geq \mu_2 \end{cases} \quad (13)$$

この厳密解は図 4 (a) のように区間 (μ_1, μ_2) の一様分布を表しているが、この解はミクセルの成立過程を考えれば自然な結果であると言える。また各クラスの確率密度関数が正規分布の場合の解も図 4 (b) に示した。

式 (9) が示すように、ミクセル密度とはピュアピクセル密度を単に重ね合わせたものではなく、式 (7) によって畳み込んだピュアピクセル密度をさらに積分して得られるものである。従って、ミクセル密度とはピュアピクセル密度と本質的に異なる新しい確率モデルである点を認識する必要がある。この新たな確率モデルの特徴は、

1. ピュアピクセル密度のピークの間広がる平坦な形状という、確率密度関数には特異な形状。
2. ミクセル密度に関係するピュアピクセル密度の形状パラメータおよび面積占有率密度のみから形状は決定 (独自の形状パラメータはなし)。

とまとめられよう。従来の統計的画像分類手法ではこのような確率密度関数はほとんど用いられたことがないため、これらミクセル密度の特徴の意味を簡単に述べる。

画像ヒストグラム上で複数の鋭いピークの中に「裾の重い」平坦な部分が広がっている場合がある。この種の画像ヒストグラムは正規分布の和として近似することが難しく、正規分布を用いた最尤法などの統計的手法をそのまま適用すると、不適切な結果を生成する可能性があるという問題点が指摘されていた。この問題点に対して図 4 は、画像ヒストグラムのピーク部分はピュアピクセル密度の部分、また裾の重い平坦な部分はミクセル密度の部分であるという、画像ヒストグラムの新たな解釈を示唆していると見ることができる。

5 期待面積占有率の導出

これまでの展開によって、式 (2) に現れる確率変数それぞれについて確率モデルを導いた。次に「ミクセルの画素値 r から面積占有率 a を推定する」問題に議論を進めるが、先述したように a を直接求めることはできないため、間接的に推定する方法を探ることになる。まず第一の方法は、生起確率が最大となる面積占有率 $a_m(r)$ 、

$$a_m(r) = \operatorname{argmax}_{a \in \Psi} f(a)p(r|a) \quad (14)$$

を面積占有率の推定値とする方法である。この推定値は最尤推定の意味で最適な推定値であることから、これを「最尤面積占有率」と呼ぶ。それに対して本論文が提案する第二の方法では、以下のように a の期待値 $a_e(r)$ を面積占有率の推定値とする。

$$a_e(r) = \int_{\Psi} a \frac{f(a)p(r|a)}{d(r)} da \quad (15)$$

この推定値は期待値の意味で最適な推定値であるため、これを「期待面積占有率」と呼ぶ。

両者を比較すると、まず最尤面積占有率では各クラスの確率密度関数の形状が推定値と無関係であるのに対し、期待面積占有率では影響を加味してより精密な解析を展開できる。解析的に解を導出できない場合には、後者の方が計算量が大きくなるという欠点もあるが、以下では期待面積占有率を用いることにする。

まずは最も単純な例を取り上げて、期待面積占有率を具体的に計算する。再び各クラスの確率密度関数がデルタ関数で表されるという最も単純な場合を考える。一般性を失わずに $\mu_1 < r < \mu_2$ とし、式 (11) を参考にする、期待面積占有率 $a_e(r)$ は、

$$a_e(r) = \int_0^1 a \frac{f(a)p(r|a)}{d(r)} da = \frac{\mu_2 - r}{\mu_2 - \mu_1} \quad (16)$$

と求められる。デルタ関数の場合には期待面積占有率に関しても厳密解を得ることができ、ミクセルの画素値 r に対して面積占有率が線形に変化する解が得られる。

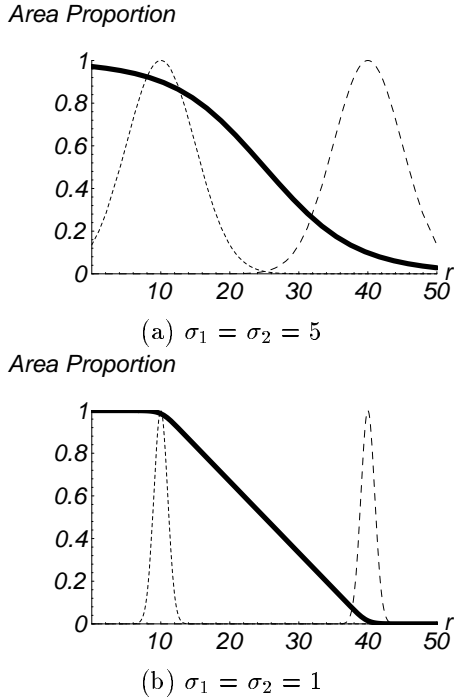


図 5: 2 クラスミクセルの期待面積占有率

より現実的な例として、各クラスの確率密度関数が正規分布の場合の解も示す。すると図5が示すように、各クラスの確率密度関数の分散が小さくなるにつれて線形な関数に漸近していく解が得られる。正規分布の分散を0とした極限がデルタ関数であることから、この結果は式(16)の自然な拡張と言える。

6 画像分類法の衛星画像への適用

本論文の提案手法を実際の画像に適用するためには、まず各クラスの確率密度関数 $p_i(x_i)$ を画像データ自身から推定する必要がある。本論文では画像ヒストグラムを各クラスの確率密度関数の有限混合密度とみなし、 M 個の確率密度関数を持つ有限混合密度、

$$p(r|\phi, \alpha) = \sum_{i=1}^M \alpha_i p_i(r|\phi_i) \quad (17)$$

をモデルとする。ここで $p_i(r|\phi_i)$ はパラメータ ϕ_i を持つ各クラスの確率密度関数である。そして α_i は確率密度関数の混合比であり、 $\alpha_i > 0$ と $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$ が成立する。ただし本論文のモデルは通常の混合密度モデルとは異なり、分類クラスの数と確率密度関数の数が一致しない。その理由は、ピュアピクセルの確率密度関数に加えて、本論文が提案する「ミクセル密度」も新たに混合密度モデルに含めるためである。画像ヒストグラムからパラメータや混合比を推定する手法にはEMアルゴリズムを用いる。そして確率密度関数が最大となるクラスに各画素を分類するという、ベイズの決定則によって画像分類を行う(詳細については別論文を参照[7, 8])。

実験画像は図6上段の画像である。いずれも気象衛星NOAAのAVHRRセンサーで観測した赤外画像(チャンネル4)であり、ミクセルが発生しやすい気象条件として冬の季節風の吹き出しによる筋状の雲を選んでいる。

最初に混合密度推定の結果を図6に示す。ミクセル密度なしで混合密度推定を行う場合に比べ、ミクセル密度を用いる場合には画像ヒストグラムに対して良好な適合が得られている。次にミクセル密度を用いる場合の面積占有率密度の影響を調べると、従来用いられてきた一様分布(ベータ分布のパラメータを固定)よりも、ベータ分布(二つのパラメータをEMアルゴリズムの過程で同時に最適化)の方が、より良好な適合が得られることがわかった。最後に、情報量規準であるAkaike Information Criterion (AIC) [9]を用いて混合密度推定の良さを比較する。AICが小さい方が良いモデルとなるが、図6の数値を比較するとベータ分布の場合が最小の値を示している。すなわち本論文で提案する新しい画像分類法が衛星画像の分類に有効であることが示された。

7 おわりに

本論文では、ミクセルの内部構造を反映する新たな確率モデルとして「面積占有率密度」と「ミクセル密度」を提案し、このモデルの導出過程・特徴・形状の特異性などについてまとめ、これらの確率モデルに基づきミクセルを含む画像に対する新たな画像分類法を提案した。今後はモデルをより精緻化していくと同時に、画像処理への新たな応用を提案していくことを考えている。

参考文献

- [1] Settle, J.J. and Drake, N.A. Linear Mixing and the Estimation of Ground Cover Proportions. *Int. J. Remote Sensing*, Vol. 14, No. 6, pp. 1159-1177, 1993.
- [2] Foody, G.M. and Cox, D.P. Sub-Pixel Land Cover Composition Estimation Using a Linear Mixture Model and Fuzzy Membership Functions. *Int. J. Remote Sensing*, Vol. 15, No. 3, pp. 619-631, 1994.
- [3] 北本朝展, 高木幹雄. ミクセルの内部構造を反映する面積占有率密度を用いた画像分類法. 電子情報通信学会論文誌, Vol. D-II, 1998. (投稿中).
- [4] Voss, R.F. Random Fractal Forgeries. In Earnshaw, R.A., editor, *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*, pp. 805-835. Springer-Verlag, 1985.
- [5] フェラー, W. 確率論とその応用 I. 紀伊国屋書店, 1960.
- [6] フェラー, W. 確率論とその応用 II. 紀伊国屋書店, 1969.
- [7] Kitamoto, A. and Takagi, M. A Stochastic Model of Mixels and Image Classification. In *Proc. of 13th ICPR*, pp. 745-749, Wien, 1996.
- [8] 北本朝展, 高木幹雄. ミクセル密度を含む混合密度推定を用いたミクセルの面積占有率推定. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J81-D-II, No. 6, 1998. (掲載予定).
- [9] 坂元慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎. 情報量統計学. 共立出版, 1983.

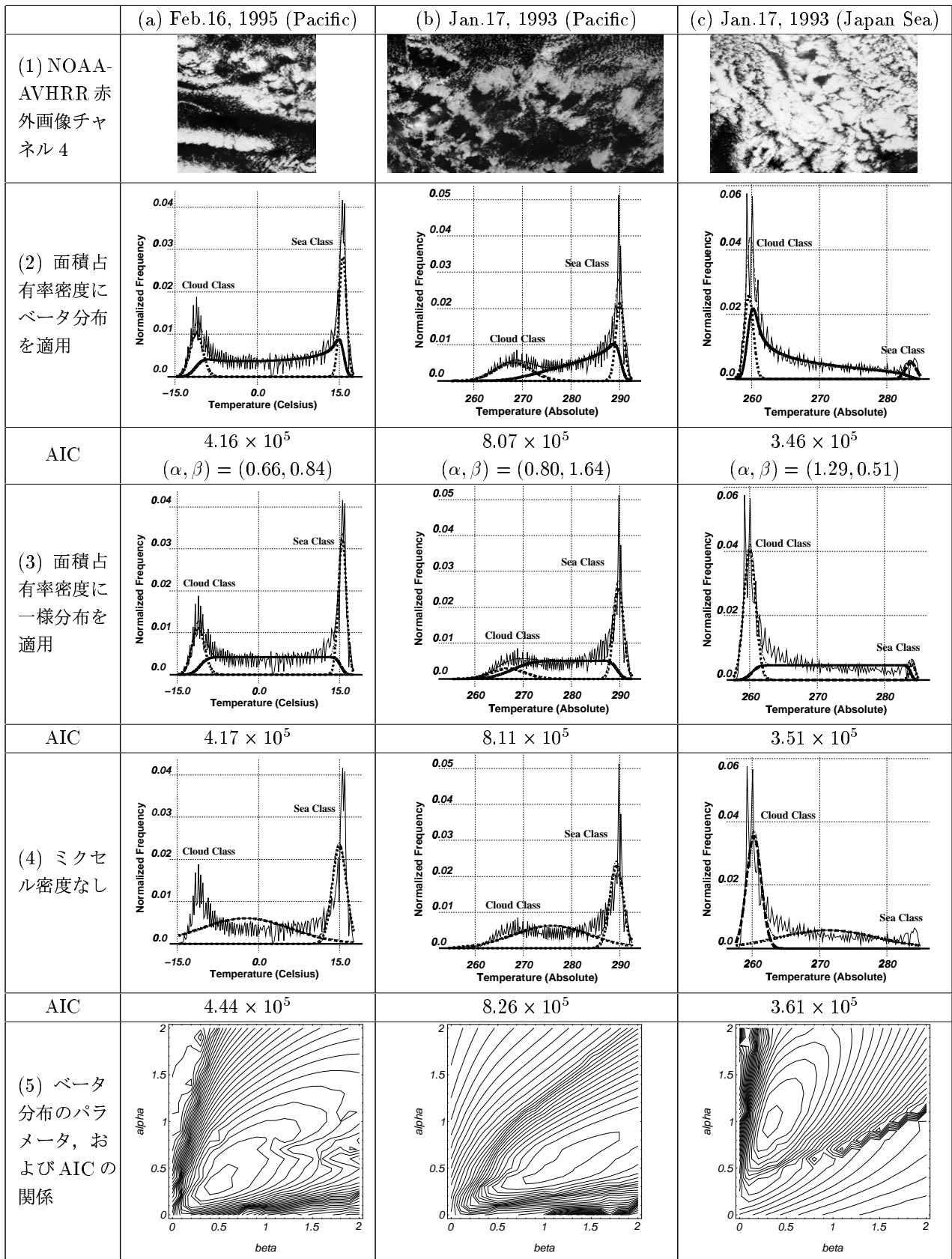


図 6: 画像ヒストグラムに対する混合密度推定 (細実線: ヒストグラム, 太実線: ミクセル密度, 太点線: ピュアピクセル密度)